Oscylator wymuszony.

Amplituda drgań w funkcji częstości wymuszającej

Niniejsze opracowanie, do pary z artykułem *Siła oporu lepkiego*, domyka opis trzech podstawowych zagadnień oscylacji harmonicznych: swobodnych (free), tłumionych (damped) oraz wymuszonych (forced). Stanowią one również zgrabną wprawkę w rachunkach z użyciem liczb zespolonych.

Oscylator wymuszony to taki, do którego – w kierunku jego naturalnych wahań – przyłożono harmoniczną siłę, zwaną siłą wymuszającą, na tyle dużą, żeby ingerowała skutecznie w jego ruch. Matematyka i doświadczenie pokazują, że po niezbyt długim czasie, oscylator taki zaczyna drgać z częstością wymuszającą (stąd nazwa siły). Oscylator wymuszony jest jednocześnie tłumionym (występuje opór lepki, proporcjonalny do prędkości), ponieważ siła wymuszająca dostarcza cały czas energii do oscylatora – wobec czego bez dyssypacji energii na oporze, siła wymuszająca magazynowałaby z czasem coraz większą energię w oscylatorze, bez ograniczeń, prowadząc nieuchronnie do jego zniszczenia. To również zobaczymy w ramach dyskusji wyników.

Rozważać będziemy harmoniczną siłę wymuszającą w rodzaju $F_0 \cos \omega t$ lub $F_0 \sin \omega t$ (co na jedno wychodzi, bo sinus od cosinusa różni się jedynie przesunięciem w fazie o π /2). Dla siły wymuszającej rezerwujemy oznaczenie ω (bez indeksu) na jej częstość, podczas gdy swobodną częstość oscylatora, do którego została przyłożona, oznaczymy ω_0 .

Dynamiczne równanie ruchu, którego rozwiązanie jest naszym głównym celem, ma w obecnym zagadnieniu postać

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\gamma \frac{dx_1}{dt} - kx_1 + F_0 \cos \omega t$$

lub, alternatywnie,

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\gamma \frac{dx_2}{dt} - kx_2 + F_0 \sin \omega t \quad .$$

Celowo wyróżniliśmy indeksami 1 i 2 zmienną x w równaniu pierwszym i drugim, choć mamy na myśli dokładnie to samo – wychylenie oscylatora z położenia równowagi (tj. przemieszczenie masy m na sprężynce o twardości k w ośrodku o współczynniku oporu γ) – bowiem dla różnych postaci siły wymuszającej również otrzymamy lekko różne rozwiązania na x, które nie powinny nam się pomieszać. W gruncie rzeczy, interesuje nas tylko jedno (np. pierwsze) z nich. Po co zatem w ogóle wprowadzać równanie nr 2? Ponieważ traktując je razem, jest nam je łatwiej wspólnie rozwiązać, niż którekolwiek z nich osobno!

Wprowadźmy klasyczne oznaczenia, konsystentne z poprzednim artykułem: $\frac{\gamma}{2m} =: \delta, \ \frac{k}{m} =: \omega_0^2$. Mnożąc drugie równanie przez *i* i dodając je stronami, otrzymujemy

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + ix_2) + 2\delta \frac{d}{dt}(x_1 + ix_2) + \omega_0^2 (x_1 + ix_2) = \frac{F_0}{m}(\cos \omega t + i \sin \omega t) \ .$$

Wprowadzając oznaczenie $\mathbb{C} \ni x := x_1 + ix_2$ (przy czym interesuje nas tylko Re *x*) oraz zapisując prawą stronę w postaci biegunowej, mamy

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \mathrm{e}^{i\omega t} \ .$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu niejednorodne. Jak dowodzi klasyczna algebra, jego ogólne rozwiązanie będzie składało się z sumy ogólnego rozwiązania równania jednorodnego oraz pojedynczego, arbitralnie dobranego, szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego (RORN = RORJ + RSRN).

RORJ to obliczone już w artykule *Siła oporu lepkiego* oscylacje podtłumione (a zatem dla $\omega_0 > \delta$, inaczej w ogóle nie można mówić o oscylacjach). Postać tego rozwiązania to

$$x = \mathrm{e}^{-\delta t} \, C \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \, t + \varphi_0\right) \ .$$

Jego cechą charakterystyczną jest człon wygaszający $\mathrm{e}^{-\delta t}$, który sprawi, że po krótkiej chwili stanu „nieokreślonego” (kilka drgań o różnych częstościach nałożonych na siebie), wygasza w całym RORN składnik RORJ do zera i pozostawia nas jedynie ze składnikiem RSRN.

Jeśli zaś chodzi o RSRN, to postulujemy drgania układu z częstością zgodną z siłą wymuszającą (która w końcu narzuca swój rytm oscylatorowi). A zatem, poszukiwane przez nas rozwiązanie będzie postaci

$$x = A \, \mathrm{e}^{i\omega t} = |A| \, \mathrm{e}^{i\varphi_A} \, \mathrm{e}^{i\omega t} = |A| \, \mathrm{e}^{i(\omega t + \varphi_A)} \ .$$

W powyższym próbnym rozwiązaniu uwzględniliśmy fakt, że jego amplituda jest również w ogólności zespolona. Jego pochodne wynosić będą, odpowiednio,

$$\frac{dx}{dt} = i\,\omega\,|A|\,\mathrm{e}^{i\,(\omega\,t\,+\,\varphi_A)} = i\,\omega\,x,$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\,|A|\,\mathrm{e}^{i\,(\omega\,t\,+\,\varphi_A)} = -\omega^2 x$$

i nasze równanie (RN) przyjmie postać

$$-\omega^2 x + i\,2\,\delta\,\omega\,x + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}$$
$$x(\omega_0^2-\omega^2 + i\,2\,\delta\,\omega) = \frac{F_0}{m}\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}\quad .$$

Gdy liczbę zespoloną w nawiasie okrągłym oznaczymy jako z i przedstawimy w postaci biegunowej,

$$z = |z|\,\mathrm{e}^{i\varphi},\ \text{gdzie}$$

$$|z| = \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\,\delta^2\,\omega^2}\,,$$
$$\varphi \equiv \arg z = \arctan\frac{2\,\delta\,\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\quad ,$$

otrzymamy nasze rozwiązanie:

$$x = \frac{F_0}{m\,|z|}\,\mathrm{e}^{i\,(\omega\,t\,-\,\varphi)}\quad ;$$
$$\Re z \equiv x_1 = \frac{F_0}{m\,|z|}\cos(\omega\,t - \varphi)\quad .$$

Szukana przez nas amplituda $|A| = \dfrac{F_0}{m\,|z|}$, zaś faza $\varphi_A = -\varphi$.

Rozważań dotyczących fazy x nie będziemy prowadzić; skupimy się za to na zbadaniu przebiegu amplitudy w funkcji odległości ω od częstości swobodnej ω_0 dla różnych wartości parametru δ (lub zamiennie, γ). Jej postać explicité wynosi

$$|A| = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\,\delta^2\,\omega^2}}\quad .$$

Rozważymy trzy przypadki. W każdym z nich pamiętamy, że drganie jest podtłumione: $\omega_0 > \delta$.

I. Gdy ω jest bardzo małe, wówczas $\omega \ll \omega_0$; wyrażenie pierwiastkowe w mianowniku jest prawie równe ω_0^2 . W granicy

$$\lim_{\omega \to 0} |A| = \frac{F_0}{m\ \omega_0^2} = \frac{F_0}{k} = Const \quad .$$

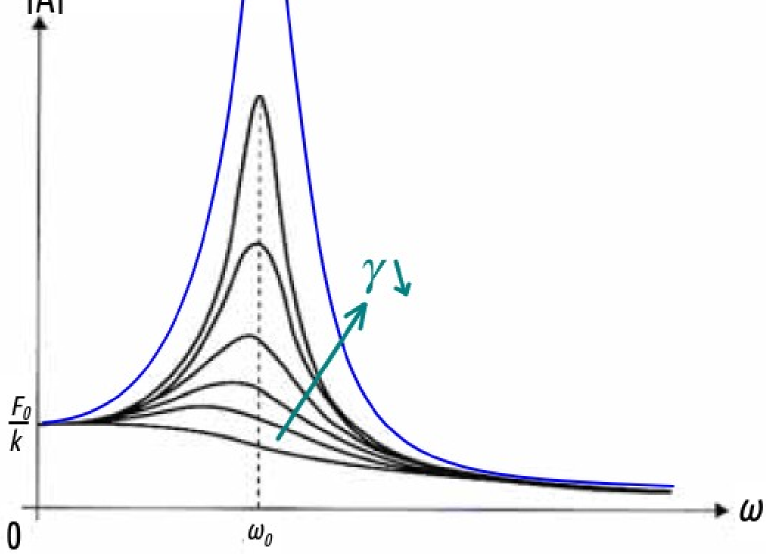
II. Gdy ω jest bardzo duże, wówczas zachodzi $\omega \gg \omega_0 > \delta$ i pierwiastek w mianowniku jest prawie równy ω^2 . Granicznie,

$$\lim_{\omega \to +\infty} |A| = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{F_0}{m\ \omega^2} = 0 \quad .$$

Widzimy, że amplituda w 0 jest wspólna dla różnych współczynników δ , następnie rośnie, aby osiągnąć maksimum i znów zmaleć asymptotycznie aż do zera. Amplitudy drgań są stosunkowo niewielkie, kiedy ω znacząco różni się od ω_0 . Zaś

III. Maksimum amplitudy przypada dla każdego niewielkiego δ w tym samym punkcie ω , w którym mianownik jest najmniejszy z możliwych, tzn. wtedy, gdy $\omega = \omega_0$. Wtedy to wyrażenie pierwiastkowe w mianowniku wynosi ściśle $2\,\delta\,\omega \equiv 2\,\delta\,\omega_0$, a cała amplituda jest równa

$$|A| = A_{max} = \frac{F_0}{2\,m\,\omega_0\ \delta} = \frac{F_0}{\gamma\ \ \omega_0} = Const \quad .$$



(*Ilustracja na podstawie Physics Stack Exchange*)

Kiedy siła wymuszająca utrafi prawie lub dokładnie w częstość własną swobodnego oscylatora, następuje gwałtowne zwiększenie się amplitudy oscylacji (czyli także i energii potencjalnej, proporcjonalnej do kwadratu amplitudy). To dlatego szyby w autobusie lub elementy jego wyposażenia zaczynają gwałtownie brzęczeć i dygotać przy jałowym biegu silnika autobusu podczas stania na światłach (hamulec i sprzęgło), a uciszają się zaraz po tym, gdy autobus ruszy z miejsca (zwiększenie obrotów silnika).

Zjawisko to nazywamy rezonansem, a częstość własną – także częstością rezonansową.

Gdy obniżamy współczynnik oporu lepkiego, amplituda drgań rośnie. W granicy, gdy usuniemy całkowicie siłę oporu lepkiego, amplituda rezonansu dąży do nieskończoności. Niejednokrotnie historia odnotowywała wypadek, gdy, pod wpływem kołysania się na silnym wietrze, przęsło źle zaprojektowanego mostu wpadało akurat w rezonans i materiał nie wytrzymywał wzbudzonych drgań. To samo może spotkać mniejszą kładkę lub mostek, gdy znajdzie się ona pod wpływem rytmicznie i regularnie maszerujących (lub jadących) nią oddziałów wojska, a nawet zwykłych przechodniów. Podobnie jak każdy element mechaniczny konstrukcji lub sprzętu, który ma pracować w pobliżu (lub być elementem składowym) drgającego regularnie układu.

Jak obronić się przed zniszczeniem oscylatora drgającego przy niewielkim oporze pod wpływem częstości rezonansowej? Oczywiście, poza odłączeniem samej siły wymuszającej. W mianowniku wyrażenia mamy, oprócz γ, jeszcze $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$. O ile zatem zwiększenie o niewiele drgającej masy (i to nierówno) może jedynie pogorszyć sytuację, to jednak jeśli przyłożymy do oscylatora masę dużo większą, wówczas staną się dwie rzeczy: po pierwsze, zmienimy częstość własną oscylatora, tak, że częstość wymuszająca przestanie się z nią zgadać. Po drugie zaś, energia siły wymuszającej stanie się zbyt mała, żeby nadać dużo bardziej bezwładnemu oscylatorowi energię do drgań (energia rozłoży się na większą masę, a zatem punktowo zmaleje). Wszystko zależy od wydajności źródła siły wymuszającej, a zwłaszcza jej amplitudy, F_0. Aby szyba autobusu nie brzęczała, wystarczy przytknąć do niej dłoń.

Autor: Marek Pietrachowicz.